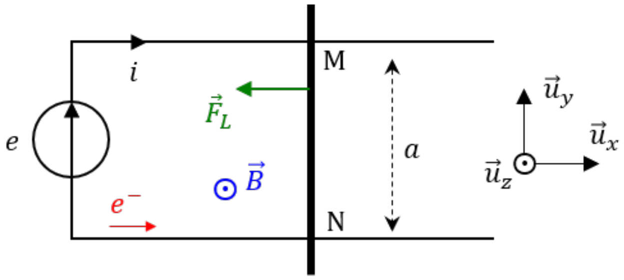
Chapitre I2 – Circuit mobile dans un champ stationnaire

I) Force de Laplace

1) Observations expérimentales

On considère l'expérience suivante. Deux rails parallèles et fixés, reliés par un générateur idéal de tension et une tige métallique libre. Le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire.



Lorsqu'on allume le générateur : la tige se met en mouvement. On en déduit qu'une force est apparue, appelée **force de Laplace**. Si on inverse le sens du générateur ou du champ magnétique, la tige part dans l'autre sens.

2) Expression de la force de Laplace

Dans un conducteur, la force de Laplace est la résultante des forces de Lorentz sur les charges mobiles. Celles-ci étant bloquées dans le matériau, cela se traduit par l'existence d'une force latérale sur le conducteur.

Il est possible de montrer qu'un bout de conducteur de longueur $d\ell$ et où l'intensité i est orientée selon le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ subit la **force élémentaire de Laplace** :

$$\boxed{d\overrightarrow{F}_L = i\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B}} \quad \text{avec :} \quad \overrightarrow{d\ell} = d\ell\overrightarrow{u}$$

On appelle **densité linéique de la force de Laplace** la force par unité de longueur :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{F}_L}{d\ell} = i\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{B}}$$

La **résultante de la force de Laplace** s'exerçant sur un conducteur d'un point M à point N vaut :

$$\overrightarrow{F}_L = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} i\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B}$$

Si le champ $\overrightarrow{B}$ est uniforme, c'est une constante qui peut sortir de l'intégrale.

$$\overrightarrow{F}_L = i\left(\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \overrightarrow{d\ell}\right) \wedge \overrightarrow{B} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{F}_L = i\,\overrightarrow{\mathrm{MN}} \wedge \overrightarrow{B}}$$

En notant $\overrightarrow{v}$ la vitesse du conducteur, on en déduit la puissance de la force de Laplace :

$$\boxed{\mathcal{P} = \overrightarrow{F}_L \cdot \overrightarrow{v}}$$

3) Retour sur l'expérience

Seule la tige est mobile, le reste du circuit est fixe. Sur cette tige, seule la partie MN est travers par un courant i. La force de Laplace vaut donc :

$$\overrightarrow{F}_L = i\,\overrightarrow{\mathrm{MN}} \wedge \overrightarrow{B} = -iaB\overrightarrow{u}_x$$

Dans cet exemple, $i > 0$ et $B > 0$, donc la force est selon $-\overrightarrow{u}_x$. Si on change le signe de i ou B, la force sera selon $+\overrightarrow{u}_x$.

La puissance de la force de Laplace vaut :

$$\mathcal{P} = \overrightarrow{F}_L \cdot \overrightarrow{v} = -iaB\overrightarrow{u}_x \cdot \dot{x}\overrightarrow{u}_x = -iaB\dot{x} > 0$$

Étant donné que $\dot{x} < 0$, on a $\mathcal{P} > 0$. Dans cette expérience, la force de Laplace est motrice, elle met en mouvement la barre. Si on change le signe de i ou B, on change également le signe de $\dot{x}$. La force restera motrice.

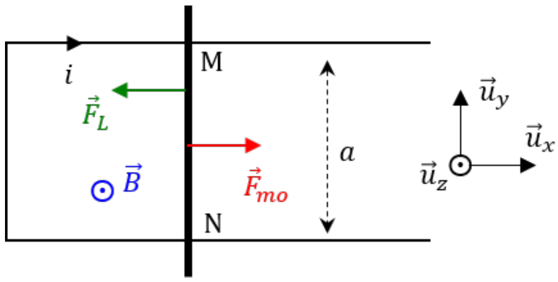
Dans ce dispositif, on a converti de l'énergie électrique (le générateur) en énergie mécanique (mouvement de la barre).

II) Étude des rails de Laplace

1) Dispositif

On considère le dispositif des rails de Laplace ci-dessous. On suppose :

- $\overrightarrow{B}$ est uniforme et stationnaire
- l'induction propre du circuit est négligée
- la résistance totale du circuit est noté R et est constante
- la tige est soumis à une force motrice $\overrightarrow{F}_{mo} = F_0\overrightarrow{u}_x$ avec $F_0 > 0$



2) Étude qualitative

Analysons qualitativement le mouvement :

- la force motrice met en mouvement la barre selon $+\overrightarrow{u}_x$
- le flux ϕ varie augmente car B contant mais S augmente
- apparition d'une force électromotrice induite
- apparition d'un courant induit $i > 0$ pour s'opposer à la variation de ϕ (Lenz)
- apparition d'une force de Laplace selon $-\overrightarrow{u}_x$ pour s'opposer à la force motrice (Lenz)

3) Étude quantitative

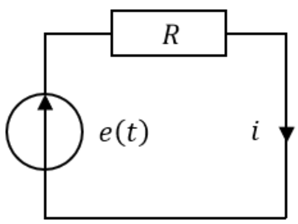
<u>Méthode</u> :

- Obtenir l'équation électrique (EE) : flux, fem, loi des mailles
- Obtenir l'équation mécanique (EM) : PFD
- Découpler les équation lorsque c'est possible pour résoudre analytiquement

Équation électrique (EE)

Flux magnétique :

$$\phi = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S} = (B\overrightarrow{u}_z) \cdot (-ax(t)\,\overrightarrow{u}_z) = -aBx(t)$$



Loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = aBv(t)$$

Loi des mailles :

$$e = Ri(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{aBv(t) = Ri(t)} \quad \text{(EE)}$$

Équation mécanique (EM)

Force de Laplace :

$$\overrightarrow{F}_L = i\,\overrightarrow{\mathrm{MN}} \wedge \overrightarrow{B} = i\,(-a\,\overrightarrow{u}_y) \wedge (B\,\overrightarrow{u}_z) = -iaB\,\overrightarrow{u}_x$$

PFD sur la tige, projeté sur $(\mathrm{O}x)$:

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}_L + \overrightarrow{F}_{mo} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\frac{dv}{dt} = -iaB + F_0} \quad \text{(EM)}$$

Découplage des équations

On a deux ED couplées d'ordre 1 sur i et v.

$$m\frac{dv}{dt} = -iaB + F_0 = \frac{(aB)^2}{R}\;v(t) + F_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{F_0}{m} \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{mR}{(aB)^2}}$$

On note v_∞ la solution particulière :

$$v_\infty = \frac{F_0\tau}{m} = \frac{F_0R}{(aB)^2}$$

La solution vaut :

$$\boxed{v(t) = v_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{aB}{R}\;v(t)$$

4) Bilan énergétique

<u>Méthode</u> :

- Multiplier (EE) par $i(t)$
- Multiplier (EM) par $\overrightarrow{v}$
- Sommer les équations et remarquer que $\mathcal{P}_{\text{fem}} + \mathcal{P}_{\text{Laplace}} = 0$

Bilans de puissance :

$$\underbrace{aBvi}_{=\,\mathcal{P}_{\text{fem}}} = \underbrace{Ri^2}_{=\,\mathcal{P}_{\text{Joule}}} \quad \text{et} \quad mv\frac{dv}{dt} = \underbrace{-iaBv}_{=\,\mathcal{P}_{\text{Laplace}}} + \underbrace{F_0v}_{=\,\mathcal{P}_{\text{mo}}}$$

On somme les deux expressions :

$$F_0v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + Ri^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P}_{\text{mo}} = \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} + \mathcal{P}_{\text{Joule}}}$$

La puissance fournie par la force motrice sert en partie à mettre en mouvement la tige et est en partie perdue par effet Joule. Une fois v_∞ atteint, toute la puissance motrice est dissipée par effet Joule.

Nous avons converti de l'énergie mécanique (puissance motrice) en énergie électrique (courant induit).

III) Freinage par induction

1) Expérience

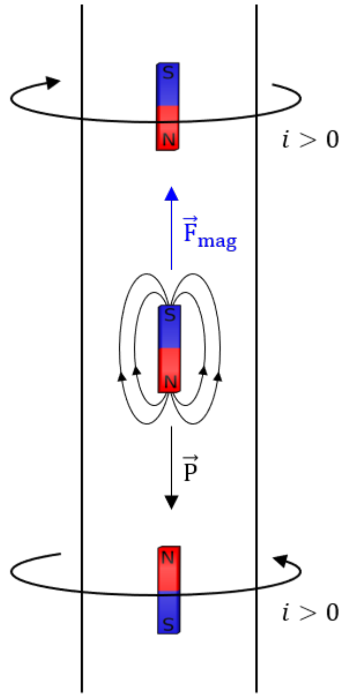
On lâche un aimant dans un tube métallique. On observe qu'il est freiné dans sa chute. Si le tube n'est pas métallique, il n'est pas freiné. Si le tube possède une rainure dans le sens de la longueur, l'aimant est bien moins freiné.

Interprétation : à l'aide de la loi de modération de Lenz

En dessous de l'aimant : lors de la chute, le flux augmente ⇒ création d'une boucle de courant pour contrer l'augmentation de flux.

Au-dessus de l'aimant : lors de la chute, le flux diminue ⇒ création d'une boucle de courant pour contrer la diminution de flux.

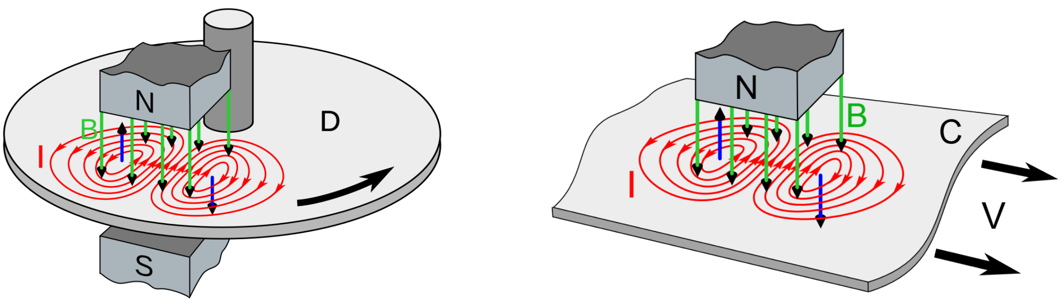
Ces courants sont appelés **courants de Foucault**. Ils dissipent de l'énergie par effet Joule. On a donc une énergie cinétique moins importante.



2) Applications

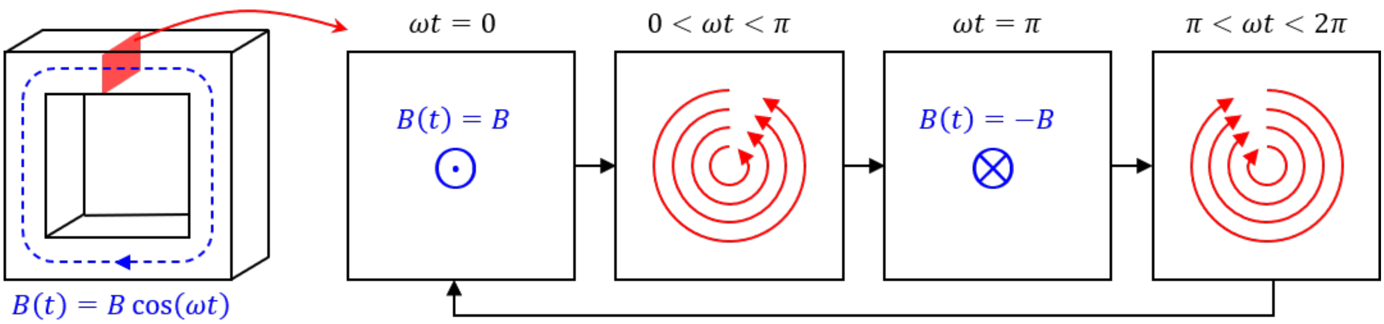
Exploitation des courants de Foucaults

On peut se servir des courants de Foucault pour freiner des véhicules. Avantage : permet de freiner le véhicule sans contact physique (moins d'usure). Inconvénient : pas efficace à faible vitesse, ne peut pas stopper entièrement le véhicule.



Réduction des courants de Foucault

Dans le tore ferromagnétique d'un transformateur, on peut éviter les pertes par effet Joule des courants de Foucault.

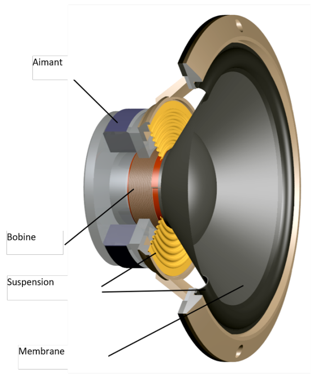


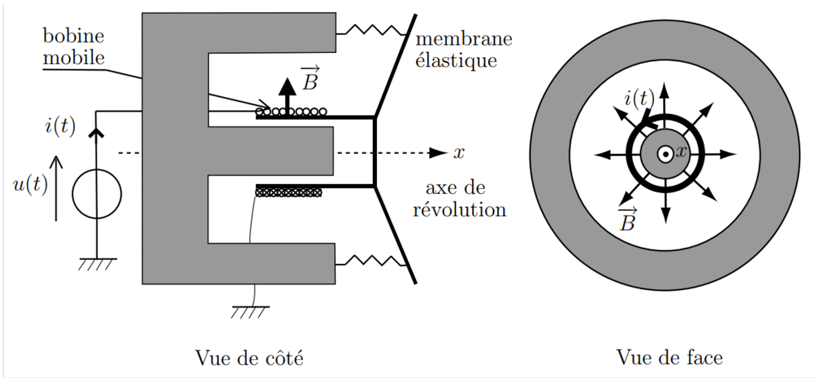
Solution : feuilleter le cuivre pour empêcher l'apparition des courants de Foucault.

IV) Étude du haut-parleur électrodynamique

1) Modélisation

Un haut-parleur est un appareil électromécanique qui transforme un signal électrique en signal sonore.





Soit un morceau $d\ell = r_0 d\theta$ de conducteur. La force élémentaire de Laplace vaut :

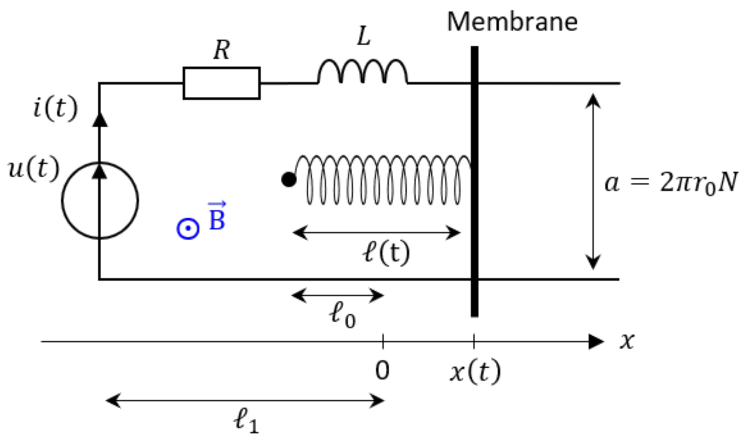
$$d\overrightarrow{F}_L = i\overrightarrow{d\ell} \wedge \overrightarrow{B} = i\left(r_0 d\theta \overrightarrow{u}_\theta\right) \wedge \left(B\overrightarrow{u}_r\right) = -iBr_0 d\theta \overrightarrow{u}_x$$

Résultante des force de Laplace :

$$\overrightarrow{F}_L = \int_0^{2\pi N} -iBr_0 d\theta \overrightarrow{u}_x = -iB\underbrace{r_0 2\pi N}_{=\,a}\overrightarrow{u}_x = -iaB\overrightarrow{u}_x$$

Tout se passe comme dans un rail de Laplace avec une longueur de tige $\boxed{a = 2\pi N r_0}$

On adopte donc une vision « dépliée » du haut parleur.



Le haut parleur est alimentée par un générateur $u(t)$. On note R la résistance totale des fils, L l'inductance propre de la bobine.

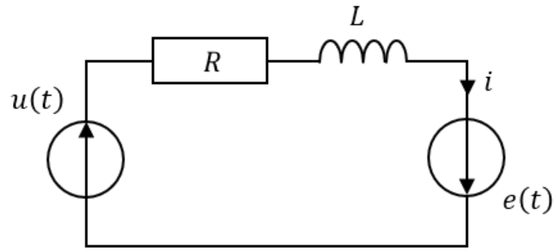
La membrane est soumise à :

- la force de Laplace : $\overrightarrow{F}_L = -iaB\overrightarrow{u}_x$
- une force de rappel élastique de la suspension : $\overrightarrow{F}_{el} = -k\left(\ell - \ell_0\right)\overrightarrow{u}_x = -kx\overrightarrow{u}_x$
- une force de frottement fluide de l'air sur la membrane, ce qui génère un son : $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v} = -\alpha v\overrightarrow{u}_x$

2) Étude quantitative

Équation électrique (EE)

Flux magnétique du champ extérieur (sans le flux propre) :



$$\phi_{ext} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S} = -aB\Big(x(t) + \ell_1\Big)$$

Loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi_{ext}}{dt} = aBv(t)$$

Loi des mailles :

$$u(t) + e(t) = Ri(t) + L\,\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u(t) + aBv(t) = Ri(t) + L\,\frac{di}{dt}} \quad \text{(EE)}$$

Équation mécanique (EM)

PFD sur la tige, projeté sur (Ox) :

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = -iaB - kx - \alpha v} \quad \text{(EM)}$$

3) Bilan énergétique

Bilans de puissance :

$$\underbrace{ui}_{=\,\mathcal{P}_{\text{gen}}} + \underbrace{aBvi}_{=\,\mathcal{P}_{\text{fem}}} = \underbrace{Ri^2}_{=\,\mathcal{P}_{\text{Joule}}} + Li\,\frac{di}{dt} \quad \text{et} \quad mv\frac{dv}{dt} = \underbrace{-iaBv}_{=\,\mathcal{P}_{\text{Laplace}}}\underbrace{-kxv}_{=\,\mathcal{P}_{\text{el}}}\underbrace{-\alpha v^2}_{=\,\mathcal{P}_{\text{frott}}}$$

On somme les deux expressions :

$$ui = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}Li^2\right) + Ri^2 + \alpha v^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P}_{\text{gen}} = \frac{d}{dt}\Big(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{\text{el}} + \mathcal{E}_{\text{mag}}\Big) + \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \mathcal{P}_{\text{frott}}}$$

La puissance fournie par le générateur est stockée sous forme d'énergie magnétique, cinétique et potentielle élastique, et est dissipée par effet Joule et par frottement fluide

4) Impédance équivalente

Déterminons l'impédance électrique équivalente du haut-parleur, définie par :

$$\underline{Z}(\omega) = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}$$

On passe en notation complexe :

$$\begin{array}{lll} \text{(EE)} & u(t) + aBv(t) = Ri(t) + L\,\dfrac{di}{dt} & \rightarrow \quad \underline{u} = -aB\underline{v}\,(R + j\omega L)\,\underline{i} \\ \text{(EM)} & m\dfrac{dv}{dt} = -iaB - kx - \alpha v & \rightarrow \quad \left(j\omega m + \dfrac{k}{j\omega} + \alpha\right)\underline{v} = -aB\underline{i} \end{array}$$

On injecte (EM) dans (EE) :

$$\underline{u} = \left(R + j\omega L + \frac{(aB)^2}{j\omega m + \dfrac{k}{j\omega} + \alpha}\right)\underline{i}$$

On en déduit :

$$\underline{Z}(\omega) = R + j\omega L + \left(\frac{j\omega m}{(aB)^2} + \frac{k}{j\omega\,(aB)^2} + \frac{\alpha}{(aB)^2}\right)^{-1} = R + j\omega L + \left(j\omega C_m + \frac{1}{j\omega L_m} + \frac{1}{R_m}\right)^{-1}$$

Avec :

$$C_m = \frac{m}{(aB)^2} \qquad L_m = \frac{(aB)^2}{k} \qquad R_m = \frac{(aB)^2}{\alpha}$$

Le circuit équivalent est :